Урок №24 (28.02.2019)
Переходные процессы в RC и RL цепочках.

1. RC-цепочка, разряд конденсатора

Рассмотрим цепь из последовательно соединённых сопротивления R, конденсатора C, заряженного зарядом Q_0. Пусть цепь вначале разомкнута, а в момент времени «0» цепь замыкают.

Очевидно, т.к. на пластинах конденсатора с разных сторон находятся одинаковые по модулю и разные по знаку заряды, то через бесконечно большое время они полностью взаимоуничтожатся, конденсатор разрядится и ток в цепи прекратится. С другой стороны, в начальный момент ток в цепи будет, причём его величина будет определяться только наличием сопротивления R. Процесс перехода от начального состояния к конечному, называется *переходным процессом*.

Пусть конденсатор заряжен до заряда Q_0 и начинает разряжаться через сопротивление R. В этом случае

$$I(t)R+\frac{Q(t)}{C}=0,$$

$$\frac{dQ}{dt}R+\frac{Q}{C}=0.$$

Разделим переменные:

$\frac{dQ}{Q}=-\frac{dt}{RC}$, интегрируя с обеих сторон, получаем:

$$\ln(Q)=-\frac{1}{RC}+const.$$

Находим константу из условия $Q(0)=Q_0$:

$$const=\ln Q_0.$$

Подставляя, получаем выражение для $Q(t)$:

$$\ln Q-\ln Q_0=\ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right)=-\frac{t}{RC},$$

$$Q(t)=Q_0e^{-t/RC}.$$

Для тока:

$I(t)=\frac{dQ}{dt}=-\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$, или

$\boxed{I(t)=I_0e^{-t/RC}}$ – разряд в RC-цепочке.

2. RC-цепочка, заряд конденсатора

Рассмотрим цепь из последовательно соединённых сопротивления R, конденсатора C и источника постоянного тока с ЭДС U. Пусть цепь вначале разомкнута, а в момент времени «0» цепь замыкают.

Очевидно, что т.к. цепь разорвана конденсатором, то через бесконечно большое время ток по ней течь не будет. С другой стороны, в начальный момент конденсатор не заряжен и ток в цепи будет, причем его величина будет определяться только наличием сопротивления R.

Запишем правило Кирхгофа для нашей цепи в произвольный момент времени: $U = I(t)R + \dfrac{Q(t)}{C}$, где $Q(t)$ – заряд на конденсаторе в некоторый момент времени, для которого мы записали уравнение, а $I(t)$ – сила тока в этот момент.

Заметим, что скорость, с которой заряд протекает через резистор ($I(t) = dQ(t)/dt$), равна скорости, с которой он накапливается на конденсаторе. Поэтому

$$U = R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t).$$

Теперь нам требуется найти функцию $Q(t)$. Преобразуем уравнение:

$$\frac{dQ}{Q - CU} = -\frac{dt}{RC},$$

$$\int \frac{dQ}{Q - CU} = -\int \frac{dt}{RC},$$

$$\ln(Q - CU) = -\frac{t}{RC} + const.$$

Значение константы находится из начальных условий: $Q = 0$ при $t = 0$, откуда

$$const = \ln(-CU).$$

Подставляя найденное значение, получим:

$$\ln(Q - CU) - \ln(-CU) = -\frac{t}{RC}, \text{ или}$$

$$\ln\left(1 - \frac{Q}{CU}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Избавляясь от логарифма, получим

$$1 - \frac{Q}{CU} = e^{-t/RC}, \text{ или}$$

$$Q(t) = CU\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

Величина RC называется *постоянной времени* RC-цепочки: чем она больше, тем дольше длится переходной процесс.

Продифференцировав функцию $Q(t)$, найдём зависимость тока в цепи от времени:

$I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$, или

$\boxed{I(t) = \dfrac{U}{R} e^{-t/RC}}$ – заряд в RC-цепочке.

Как и ожидалось, в начальный момент времени ток равен $\dfrac{U}{R}$*, т.е. будто в цепи конденсатора нет.*

3. RL-цепочка, заряд

Теперь проделаем те же выкладки для RL-цепочки, включенной последовательно с ЭДС U. По закону Кирхгоффа:

$$U - L\frac{dI(t)}{dt} = I(t)R,$$

$$\frac{dI}{U - I(t)R} = \frac{dt}{L},$$

$$\int \frac{dI}{U - IR} = \int \frac{dt}{L}.$$

Учтём, что $\dfrac{d(U - IR)}{dI} = -R$; следовательно, $dI = -\dfrac{1}{R} d(U - IR)$ и первый интеграл можно переписать в виде

$$\int \frac{dI}{U - IR} = -\frac{1}{R}\int \frac{d(U - IR)}{U - IR} = -\frac{1}{R}\ln(U - IR),$$

$$-\frac{1}{R}\ln(U - I(t)R) = \frac{1}{L}t + const,$$

$U - I(t)R = e^{-\frac{R}{L}t + const} = K \cdot e^{-t/\tau}$, $K = e^{const}$, $\tau = L/R$ – *постоянная времени* RL-цепочки

Из начальных условий $I(0) = 0$ (т.к. катушка имеет в этот момент ЭДС самоиндукции практически равный U), откуда получаем, что $K = U$. Окончательно:

$\boxed{I(t) = \dfrac{U}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ – заряд в RL-цепочке.

4. RL-цепочка, разряд

Для разряда получаем аналогично:

$$L\frac{dI}{dt} + RI(t) = 0,$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L}dt,$$

$$\ln(I(t)) = -\frac{R}{L}t + const,$$

при этом $I(0)=I_0$, следовательно $const=\ln(I_0)$.

$$\ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right)=-\frac{R}{L}t\ ,$$

$\boxed{I(t)=I_0e^{-t/\tau}}$ – разряд в RL-цепочке.